ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1988

PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA :Les sept sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

SUJET N° 1

Soit trois points A , B , C non alignés. On considère les points A' , B' et C' définis par :

$\alpha\ \overrightarrow{A'B} + (1-\alpha)\ \overrightarrow{A'C} = 0$, $\beta\ \overrightarrow{B'C} + (1-\beta)\ \overrightarrow{B'A} = 0$, $\gamma\ \overrightarrow{C'A} + (1-\gamma)\ \overrightarrow{C'B} = 0$

où α , β et γ désignent trois nombres réels deux à deux différents, distincts de zéro et de un,

puis les points A'' , B'' et C'' définis par :

$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'}$.

(1) Donner la relation que doivent vérifier α , β et γ pour que A'', B'' et C'' soient alignés.

(2) Les points A' , B' et C' sont-ils alors alignés ?

SUJET N° 2

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien on considère un repère $\mathcal{C}$ non orthonormé $O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}$, d'origine O.

Les normes des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont : $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 2$, $\|\vec{k}\| = 4$

et les mesures des angles des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont $(\widehat{\vec{i}\ ,\ \vec{j}}) = (\widehat{\vec{j}\ ,\ \vec{k}}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

et $(\widehat{\vec{k}\ ,\ \vec{i}}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Tous les calculs seront faits dans le repère $\mathcal{C}$.

Soit P le plan d'équation $x + y = 1$ et S la surface d'équation

$x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 2xy + 8yz = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

(1) Donner l'équation de la surface $S' = \sigma(S)$ où σ est la symétrie orthogonale par rapport au plan P .

Déterminer λ pour que S' passe par O . Soit S'_0 la surface ainsi obtenue.

(2) Soit le plan Π d'équation $x + y + 3z = 3$.

Donner l'équation de $\sigma(\Pi) = \Pi'$.

(3) Montrer que $S'_0 \cap \Pi'$ présente un centre de symétrie Ω' ; préciser les coordonnées de Ω' .

($S'_0 \cap \Pi'$ représente l'intersection de S'_0 et de Π').

Tournez la page S.V.P.

SUJET N° 3

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O, $M = (x, y)$ désigne le point courant et $A = (a, 0)$ un point donné, $(a > 0)$.

Soit $B = (0, b)$ un point mobile de l'axe des y.

(1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des positions de M défini par :

$$\| \overrightarrow{BM} \| = a \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$$ se décompose en une droite Δ et une cubique Γ.

(2) Etudier l'ensemble des positions $\mathcal{P}$ de P défini, pour $M \in \Gamma$, par : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$.

(3) Préciser les centres de courbure au point (0,0) des deux branches de Γ qui passent par O, puis donner le centre de courbure de Γ au point A.

SUJET N° 4

Soit K l'ensemble des nombres complexes privé des trois nombres -1, 0, 1 : $K = \mathbb{C} - \{-1, 0, 1\}$.

On désigne par u l'application qui à tout $z \in K$ associe $u(z) = \frac{1+z}{1-z}$

et par φ l'application qui à tout $z \in K$ associe $\varphi(z) = z + u(u(z))$.

Enfin P_z est le polynôme défini par : $P_z(X) = (X^2 - \varphi(z) \cdot X - 1)(X^2 - \varphi(u(z)) \cdot X - 1)$.

(1) Etudier la convergence éventuelle de la suite définie, pour $z \in K$, par :

$z_0 = z$, $z_1 = u(z)$, $z_2 = u(z_1)$, ..., $z_{n+1} = u(z_n)$..., $n \in \mathbb{N}$.

(2) Etudier la suite de polynômes P_z, P_{z_1}, ..., P_{z_k}, $k \in \mathbb{N}$.

(3) Décomposer les fractions rationnelles $\frac{1}{P_z(X)}$ et $\frac{P'_z(X)}{P_z(X)}$ en éléments simples de première espèce sur $\mathbb{C}$ (P'_z désigne la dérivée de P_z par rapport à X).

SUJET N° 5

Déterminer trois polynômes P_n, Q_n et R_n tels que l'on ait, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$(X^2 - 2X\cos\alpha + 1) \sum_{k=1}^{k=n} X^{n-k} \sin k\alpha = P_n(X)\sin\alpha + Q_n(X)\sin n\alpha + R_n(X)\sin(n+1)\alpha.$$

SUJET N° 6

Décomposer sur $\mathbb{R}$ en éléments simples la fraction rationnelle suivante : $\frac{81X}{(X-1)^4(X^2+X+1)^2}$

SUJET N° 7

Soient les deux matrices complexes :

$$A = \begin{bmatrix} 7-4i & 2i+1 & 3-31i \\ 9+13i & 0 & 11+i \\ 5+7i & i-2 & 31+3i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prouver l'existence de deux matrices U et V telles que $AU = BA$ et $VA = AB$.

Calculer $U^3 + V^3$.

»»»»»»»»»»o«««««««««««

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail